

Figuras planas: **POLÍGONOS**

¿QUÉ SON LOS POLÍGONOS?

Son figuras planas formadas por una línea poligonal cerrada y su interior.

Cualquier figura plana que esté formada por “lados rectos” es un polígono.

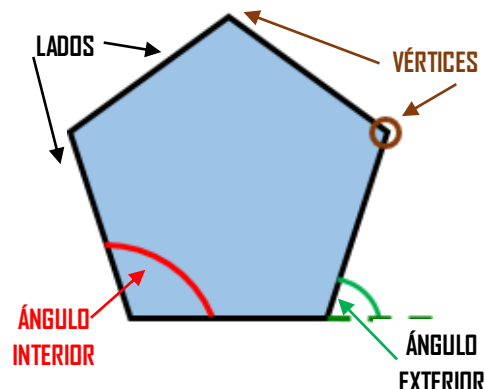
ELEMENTOS DE UN POLÍGONO

Los elementos de un polígono se establecen a tres niveles:

1. **EN SU LÍNEA POLIGONAL:** lados, vértices y ángulos (interiores y exteriores).
2. **EN SU INTERIOR:** el elemento más importante son las **diagonales**, aunque podríamos establecer otros elementos como **mediatrices** de sus lados y **bisectrices** de sus ángulos. En los polígonos regulares también se establecen las **apotemas**, los **radios**, el **centro** y los **ángulos interiores**.
3. **CÁLCULOS ESPACIALES.** Los principales son el **perímetro** (la suma de todos sus lados) y la superficie o **área** (lo que mide su espacio interior).

ELEMENTOS EN SU LÍNEA POLIGONAL

- **LADOS.** Son cada uno de los segmentos que forman su contorno.
- **VÉRTICES.** Son los puntos donde se unen dos lados.
- **ÁNGULOS.** Son las aberturas entre dos lados consecutivos. Hay 2 tipos:
 - **Ángulos interiores:** están dentro del polígono.
 - **Ángulos exteriores:** están fuera del polígono. Son suplementarios a los internos. **La suma de los ángulos externos de un polígono es 360°.**

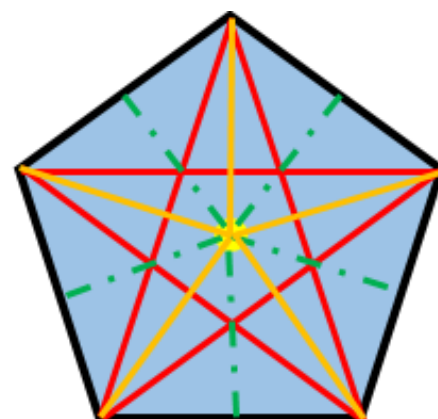


ELEMENTOS EN SU INTERIOR

- **DIAGONALES.** Son segmentos que van desde un vértice a otro no consecutivo. Cada polígono tiene « $n \cdot (n - 3) / 2$ » diagonales, siendo ‘n’ el número de lados del polígono. Por ejemplo, un pentágono tiene 5 diagonales.

SOLO EN POLÍGONOS REGULARES:

- **CENTRO.** Es un punto interior equidistante de todos sus vértices. (En algunos polígonos irregulares, también se puede establecer un centro).
- **APOTEMAS.** Segmentos que van desde el centro de cada lado al centro del polígono.
- **RADIOS.** Segmentos que van desde cada vértice al centro del polígono.
- **ÁNGULOS CENTRALES.** Hay varios tipos, los formados por sus apotemas, los formados por sus radios y los formados entre ambos.



DIAGONALES / APOTEMAS / RADIOS

El centro, en amarillo.

** En realidad, se pueden establecer más elementos.*

Nº de DIAGONALES de CUALQUIER POLÍGONO

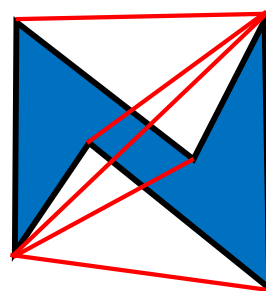
Para calcular las diagonales de cualquier polígono basta con aplicar la fórmula:

$$\text{Nº de diagonales} = \frac{n \cdot (n-3)}{2}, \text{ siendo } n \text{ el número de lados del polígono.}$$

POLÍGONO (según su nº de lados)	n	nº total de DIAGONALES	FÓRMULA (aplicada)
TRIÁNGULO	3	0	$3 \times (3-3) / 2 = 3 \times 0 : 2 = 0$
CUADRILÁTERO	4	2	$4 \times (4-3) / 2 = 4 \times 1 : 2 = 2$
PENTÁGONO	5	5	$5 \times (5-3) / 2 = 5 \times 2 : 2 = 5$
HEXÁGONO	6	9	$6 \times (6-3) / 2 = 6 \times 3 : 2 = 9$
HEPTÁGONO	7	14	$7 \times (7-3) / 2 = 7 \times 4 : 2 = 14$
OCTÓGONO	8	20	$8 \times (8-3) / 2 = 8 \times 5 : 2 = 20$
ENEÁGONO	9	27	$9 \times (9-3) / 2 = 9 \times 6 : 2 = 27$
DECÁGONO	10	35	$10 \times (10-3) / 2 = 10 \times 7 : 2 = 35$
ENDECÁGONO	11	44	$11 \times (11-3) / 2 = 11 \times 8 : 2 = 44$
DODECÁGONO	12	54	$12 \times (12-3) / 2 = 12 \times 9 : 2 = 54$

**¿SABÍAS QUE LOS POLÍGONOS
CÓNCAVOS TIENEN DIAGONALES
EXTERIORES?**

Debido a su forma, algunas
diagonales salen fuera del polígono.



Si te fijas bien, **el número de diagonales sigue siempre una progresión aritmética.** Fíjate:

n = 3	n = 4	n = 5	n = 6	n = 7	n = 8	n = 9	n = 10	n = 11	n = 12	n = 13	n = 14	n = 15	n = 16	n = 17
0	2	5	9	14	20	27	35	44	54	65	77	90	104	119
	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8	+9	+10	+11	+12	+13	+14	+15

Esta progresión es casi idéntica a la de los números triangulares.

LISTA DE NÚMEROS TRIANGULARES. Los primeros números triangulares son:

Para 'n = ...'	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5	n = 6	n = 7	n = 8	n = 9	n = 10	n = 11	n = 12	n = 13	n = 14	n = 15
Nº triangular	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120

MEDIDA TOTAL de TODOS los ÁNGULOS INTERIORES de CUALQUIER POLÍGONO

Tienes que saber que los tres ángulos interiores de cualquier triángulo siempre miden 180° , sea el triángulo que sea; los del cuadrilátero, siempre 360° ; y así, sucesivamente. Pero hay una manera de calcularlo para cualquier polígono, y es con la fórmula:

Suma de los ángulos interiores de un polígono = $(n - 2) \cdot 180^\circ$, siendo **n** el número de lados del polígono.

Además, si quieres saber cuánto mide cada ángulo de un polígono regular solo tienes que dividir la suma total de sus ángulos entre el número de lados que tiene, o aplicar la fórmula:

Medida de cada ángulo de un polígono regular = $\frac{(n-2) \cdot 180}{n}$, siendo **n** el número de lados del polígono.

Otra forma de calcular la medida de los ángulos interiores de cualquier polígono regular es con la siguiente fórmula:

Medida de cada ángulo de un polígono regular = $180 - \frac{360}{n}$, siendo **n** el número de lados del polígono.

POLÍGONO (según su nº de lados)	n	SUMA TOTAL de sus ÁNGULOS	FÓRMULA (aplicada)	Medida de cada ángulo de un polígono regular	FÓRMULA (aplicada)
TRIÁNGULO	3	180°	$(3 - 2) \cdot 180 = 1 \cdot 180 = 180$	60°	$(3 - 2) \cdot 180 / 3 = 1 \cdot 180 / 3 = 60$
CUADRILÁTERO	4	360°	$(4 - 2) \cdot 180 = 2 \cdot 180 = 360$	90°	$(4 - 2) \cdot 180 / 4 = 2 \cdot 180 / 4 = 90$
PENTÁGONO	5	540°	$(5 - 2) \cdot 180 = 3 \cdot 180 = 540$	108°	$(5 - 2) \cdot 180 / 5 = 3 \cdot 180 / 5 = 108$
HEXÁGONO	6	720°	$(6 - 2) \cdot 180 = 4 \cdot 180 = 720$	120°	$(6 - 2) \cdot 180 / 6 = 4 \cdot 180 / 6 = 120$
HEPTÁGONO	7	900°	$(7 - 2) \cdot 180 = 5 \cdot 180 = 900$	128,57°	$(7 - 2) \cdot 180 / 7 = 5 \cdot 180 / 7 = 128,57$
OCTÓGONO	8	1080°	$(8 - 2) \cdot 180 = 6 \cdot 180 = 1080$	135°	$(8 - 2) \cdot 180 / 8 = 6 \cdot 180 / 8 = 135$
ENEÁGONO	9	1260°	$(9 - 2) \cdot 180 = 7 \cdot 180 = 1260$	140°	$(9 - 2) \cdot 180 / 9 = 7 \cdot 180 / 9 = 140$
DECÁGONO	10	1440°	$(10 - 2) \cdot 180 = 8 \cdot 180 = 1440$	144°	$(10 - 2) \cdot 180 / 10 = 8 \cdot 180 / 10 = 144$
ENDECÁGONO	11	1620°	$(11 - 2) \cdot 180 = 9 \cdot 180 = 1620$	147,27°	$(11 - 2) \cdot 180 / 11 = 9 \cdot 180 / 11 = 147,27$
DODECÁGONO	12	1800°	$(12 - 2) \cdot 180 = 10 \cdot 180 = 1800$	150°	$(12 - 2) \cdot 180 / 12 = 10 \cdot 180 / 12 = 150$
Conclusiones...		Si te fijas, solo hay que ir añadiendo 180.		Cuanto más lados tiene el polígono, menos grados va aumentando lo que mediría cada uno de sus lados.	

¿SABÍAS QUE...?

- La suma de todos los ángulos exteriores de cualquier polígono siempre es **360°**.
- Los ángulos exteriores de un polígono regular miden exactamente lo mismo que sus ángulos centrales, y se calculan de la misma forma: dividiendo 360 entre su número de lados.

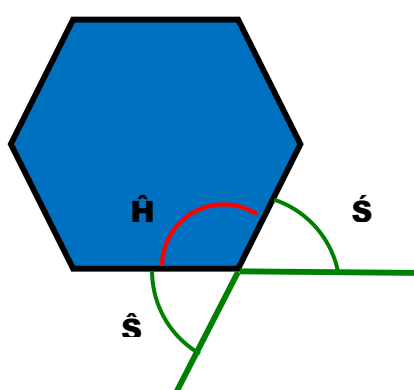
MEDIDA de los ÁNGULOS EXTERIORES de un POLÍGONO

Los ángulos exteriores de un polígono son los suplementarios a los interiores.

Se pueden calcular de muchas maneras. Nosotros te ofrecemos dos ideas distintas.

MEDIDA con un TRANSPORTADOR de ÁNGULOS

Simplemente tienes que “alargar” el lado del ángulo que quieres calcular y medir la abertura del ángulo formado con tu transportador.



Recuerda que $\hat{H}$ es suplementario con $\hat{S}$ y con $\hat{S}$. Es decir, la suma de ambos, siempre da 180° .

Una propiedad importante de los ángulos exteriores es que tanto $\hat{S}$, como $\hat{S}$, son ángulos iguales. O sea, podemos “alargar” los lados en cualquier dirección. Solo tienes que medir uno de los dos ángulos formados y ya sabes lo que mide el ángulo exterior.

CÁLCULO del ÁNGULO SUPLEMENTARIO

Simplemente tienes que restar a 180 lo que mide el ángulo interior que está junto al ángulo exterior que quieres calcular.

En el hexágono de la imagen, el ángulo $\hat{H}$ mide 120° . Para calcular la medida del ángulo exterior en ese vértice, solo tenemos que restar $180 - 120$, ya que los ángulos suplementarios suman entre ambos 180 grados. Obtenemos que el ángulo $\hat{S}$ o $\hat{S}$, ya que ambos son iguales, mide 60° .

¿SABÍAS QUE EL ÁNGULO CENTRAL DE UN POLÍGONO REGULAR MIDE EXACTAMENTE LO MISMO QUE SUS ÁNGULOS EXTERIORES?

MEDIDA de los ÁNGULOS EXTERIORES de un POLÍGONO REGULAR

En los polígonos regulares, es muy fácil calcular los ángulos exteriores, ya que, **LA SUMA DE LOS ÁNGULOS EXTERIORES DE CUALQUIER POLÍGONO SIEMPRE DA 360°** , sea regular o no.

Por tanto, para conocer para calcular la medida de cada ángulo exterior de un polígono regular, solo tenemos que dividir 360 entre el número de lados del polígono, ya que todos medirán lo mismo.

Medida de los ángulos exteriores de un polígono = $360^\circ / n$, siendo n el número de lados del polígono.

De esta forma, los ángulos exteriores de cada POLÍGONO REGULAR serán:

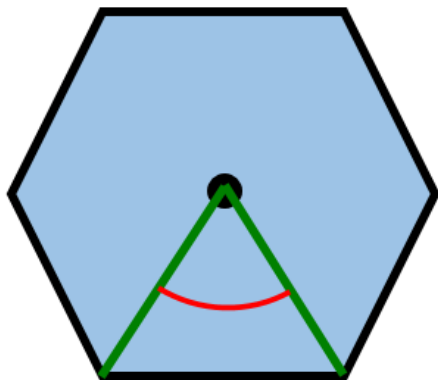
POLÍGONO (según su n° de lados)	n	MEDIDA de sus ÁNGULOS EXTERIORES
TRIÁNGULO	3	120°
CUADRILÁTERO	4	90°
PENTÁGONO	5	72°
HEXÁGONO	6	60°
HEPTÁGONO	7	$51,43^\circ$

POLÍGONO (según su n° de lados)	n	MEDIDA de sus ÁNGULOS EXTERIORES
OCTÓGONO	8	45°
ENEÁGONO	9	40°
DECÁGONO	10	36°
ENDECÁGONO	11	$32,72^\circ$
DODECÁGONO	12	30°

MEDIDA del ÁNGULO CENTRAL de un POLÍGONO REGULAR

Matemáticamente, solo los polígonos regulares tienen un centro geométrico, aunque se podría establecer también un centro en otros polígonos irregulares.

El ángulo central de un polígono regular es el formado por **dos radios consecutivos**. Ambos, son segmentos que parten de vértices consecutivos y se unen en el centro del polígono, que se convierte en el vértice de este ángulo central.



Puede resultar curioso, pero **el ángulo central de un polígono regular, mide lo mismo que su ángulo exterior**. Se pueden calcular de la misma forma, dividiendo 360 entre el número de ángulos que tiene, que el mismo que el número de lados.

Medida de los ángulos exteriores de un polígono = $360 / n$, siendo n el número de lados del polígono.

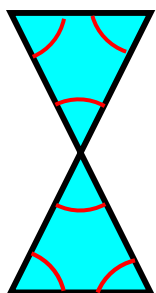
También se puede saber cuánto mide el ángulo central de un polígono regular, **calculando el ángulo suplementario de cualquier ángulo interior**.

Los 6 ángulos centrales de este hexágono, miden lo mismo, porque es regular. Todos los ángulos centrales forman una circunferencia completa, que mide, como todas, 360° . Como hay 6 ángulos centrales, solo tenemos que dividir $360 : 6$, y obtenemos que cada ángulo central del hexágono regular mide 60° .

MEDIDA de los ÁNGULOS de un POLÍGONO CRUZADO o COMPLEJO

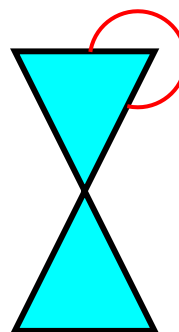
Los polígonos cruzados o complejos son un poco controvertidos en matemáticas. La razón es bien sencilla. **No siguen las mismas reglas que el resto de polígonos.**

La excepción más evidente se produce en la medida de sus ángulos, ya que **se le consideran más ángulos interiores que lados y vértices**. Vamos a mostrarlo en un ejemplo para que lo comprendas mejor.



Este polígono es un cuadrilátero, concretamente, un **trapecio cruzado**. Tiene **4 lados y 4 vértices**, más un punto donde se cruzan dos lados. Al trazarlo se generan 4 ángulos, pero uno de ellos, se quedaría externo al interior del polígono, por lo que hay que desecharlo y tomar solo los ángulos interiores,

Por eso, **en su interior se pueden encontrar 6 ángulos**. Al ser un cuadrilátero, **esos seis ángulos miden 360°** .



Este debería ser el 4º ángulo de este cuadrilátero. Pero al ser cruzado, es un ángulo externo, por lo que no debe tenerse en cuenta y tomar los ángulos interiores, aunque sean seis y sus lados sean cuatro. No importa, este ángulo mide lo mismo que los otros dos interiores que le sustituyen.

Los polígonos cruzados tienen más ángulos interiores que lados y vértices.

RESUMEN DE LOS PRINCIPALES DATOS DE TODOS LOS POLÍGONOS.

Te ofrecemos de forma resumida los principales datos que te hemos ofrecido sobre los ángulos y diagonales de cada tipo de polígono, regular o irregular, según el caso.

POLÍGONO (según su nº de lados)	n	nº total de DIAGONALES	SUMA TOTAL de sus ÁNGULOS	Medida de CADA ÁNGULO de un polígono regular	MEDIDA de sus ángulos EXTERIORES	MEDIDA de sus ángulos EXTERIORES
TRIÁNGULO	3	0	180°	60°	120°	120°
CUADRILÁTERO	4	2	360°	90°	90°	90°
PENTÁGONO	5	5	540°	108°	72°	72°
HEXÁGONO	6	9	720°	120°	60°	60°
HEPTÁGONO	7	14	900°	128,57°	51,43°	51,43°
OCTÓGONO	8	20	1080°	135°	45°	45°
ENEÁGONO	9	27	1260°	140°	40°	40°
DECÁGONO	10	35	1440°	144°	36°	36°
ENDECÁGONO	11	44	1620°	147,27°	32,72°	32,72°
DODECÁGONO	12	54	1800°	150°	30°	30°

Resumen de las fórmulas para calcularlo.

Nº de diagonales de cualquier polígono

$$\frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

Medida de cada ángulo de un polígono regular

$$\frac{(n - 2) \cdot 180}{n}$$

Suma de los ángulos interiores de cualquier polígono

$$(n - 2) \cdot 180^\circ$$

Medida de cada ángulo de un polígono regular

$$180 - \frac{360}{n}$$

Medida de los ángulos exteriores de cualquier polígono o
centrales de un polígono regular = $360 / n$

Siendo n el número de lados del polígono.

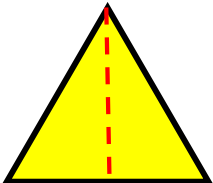
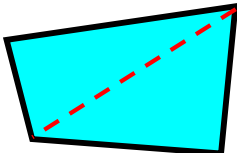
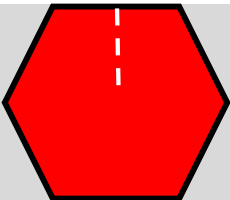
RECUERDA:

- La suma de todos los ángulos exteriores de cualquier polígono siempre es 360°.
- Los ángulos exteriores de un polígono regular miden exactamente lo mismo que sus ángulos centrales, y se calculan de la misma forma: dividiendo 360 entre su número de lados.

PERÍMETROS Y ÁREAS de TODOS los POLÍGONOS.

Te ofrecemos un cuadro resumen con la forma de calcular el perímetro y el área (o superficie) de los polígonos más comunes.

Te ofrecemos las fórmulas de forma extendida y de forma abreviada. Escoge la que más te guste.

POLÍGONO	PERÍMETRO	ÁREA
TRIÁNGULO 	La mejor forma es sumar lo que miden sus tres lados. $P = a + b + c$	$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$ $A = \frac{b \cdot a}{2}$
CUADRADO 	Como los 4 lados miden lo mismo, podemos multiplicar lo que mide un lado por cuatro. $P = 4 \cdot \text{lado}$	$A = \text{lado} \cdot \text{lado}$ $A = l^2$
RECTÁNGULO 	Los lados son iguales dos a dos. $P = 2 \cdot (a + b)$	$A = \text{lado mayor} \cdot \text{lado menor}$ $A = b \cdot a$
ROMBO 	Los 4 lados miden lo mismo. $P = 4 \cdot \text{lado}$	$A = \frac{\text{Diagonal mayor} \cdot \text{diagonal menor}}{2}$ $A = \frac{D \cdot d}{2}$
ROMBOIDE 	Los lados son iguales dos a dos. $P = 2 \cdot (a + b)$	$A = \text{lado de la base} \cdot \text{altura}$ $A = b \cdot a$
TRAPECIO 	La mejor forma es sumar lo que miden sus cuatro lados, ya que, muchas veces, todos miden distinto. $P = a + b + c + d$	$A = \frac{\text{altura} \cdot (\text{Base mayor} + \text{base menor})}{2}$ $A = \frac{a \cdot (B + b)}{2}$
TRAPEZOIDE 	La mejor forma es sumar lo que miden sus cuatro lados, ya que, muchas veces, todos miden distinto. $P = a + b + c + d$	Se divide al trapezoide en dos triángulos (con una diagonal), y se calcula el área de cada triángulo y se suman. $A = A_{\text{tr. 1}} + A_{\text{tr. 2}}$
POLÍGONO REGULAR 	Se multiplica lo que mide un lado (todos son iguales) por el número de lados del polígono. $P = n \cdot \text{longitud lado}$	$A = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2}$ $A = \frac{p \cdot ap}{2}$

- **El perímetro es la suma de las longitudes de todos los lados de un polígono.** Para calcularlo, se suma lo que mide cada lado, aunque hay formas abreviadas de calcularlo).
- **El área es lo que mide la superficie interior de un polígono.** Se expresa en **unidades cuadradas de longitud**. Para calcularlo, se utilizan fórmulas específicas.